

CHAPTER 05 함수의 성질

경영·경제분석을 위한 핵심 수학(6판)

연습문제 풀이 이용 안내

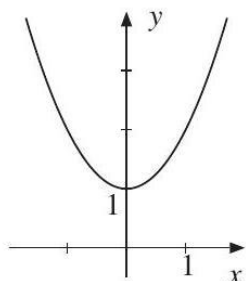
- 본 문제 풀이의 저작권은 원서 저작권자(Knut Sydsæter, Arne Strøm, Peter Hammond, Andrés Carvajal)와 Pearson, 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

CHAPTER 05 함수의 성질

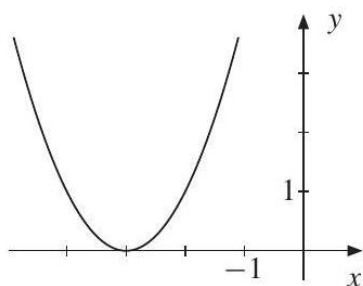
5.1 그래프 이동

1.

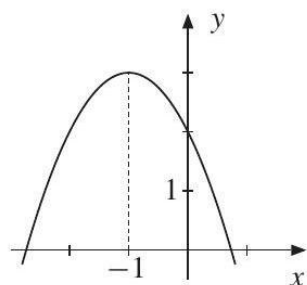
(a) $y = x^2 + 1$ 은 $y = x^2$ 의 그래프를 위쪽으로 1만큼 이동한 것이다.



(b) $y = (x + 3)^2$ 은 $y = x^2$ 의 그래프를 왼쪽으로 3만큼 이동한 것이다.

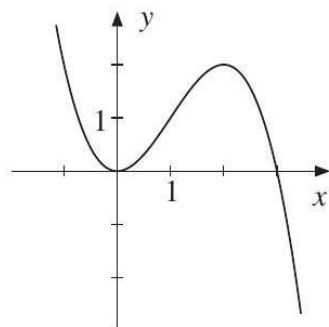


(c) $y = 3 - (x + 1)^2$ 은 $y = x^2$ 을 위아래로 뒤집은 뒤 점 $(0, 0)$ 을 $(-1, 3)$ 으로 이동시키는 것과 동일하게 그래프를 이동한 것이다.



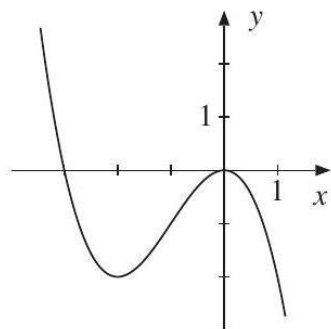
2.

(a) $y = f(x)$ 의 그래프를 오른쪽으로 2단위 이동한 것이다.

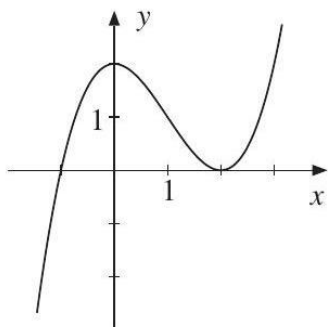


(b) $y = f(x)$ 의 그래프를 아래쪽으로 2단위 이동한 것이다.

CHAPTER 05 함수의 성질

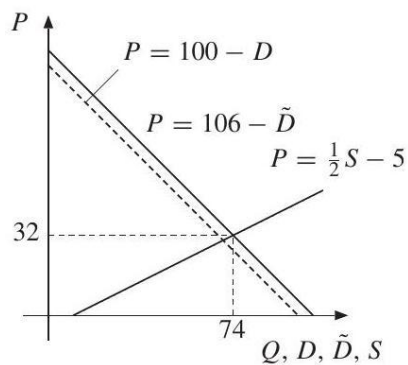


(c) $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축을 기준으로 대칭이동한 것이다.



3.

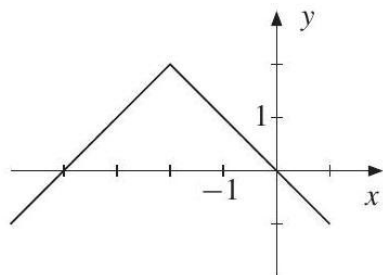
균형은 $106 - P = 10 + 2P$ 이므로 균형가격은 $P = 32$ 이다. 균형수량은 $Q = 106 - 32 = 74$ 이다. [그림 A5.1.3]을 참고하라.



[그림 A5.1.3]

4.

$y = |x|$ 의 그래프를 왼쪽으로 2단위 이동한다. 그다음 x 축에 대해 대칭이동하고, 그래프를 위로 2단위 이동한다. [그림 A5.1.4]를 참고하라.

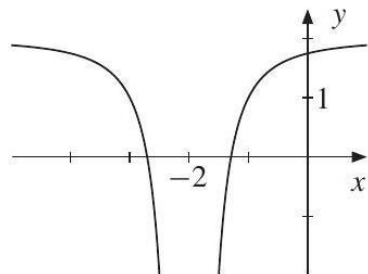


[그림 A5.1.4]

CHAPTER 05 함수의 성질

5.

$y = \frac{1}{x^2}$ 의 그래프를 그린다. 이 그래프를 왼쪽으로 2단위 이동시키고, x 축에 대해 대칭이동한 뒤 위쪽으로 2단위 이동하면 [그림 A5.1.5]와 같은 그래프가 된다.



[그림 A5.1.5]

6.

$f(y^* - d) = f(y^*) - c$ 이므로 $A(y^* - d) + B(y^* - d)^2 = Ay^* + B(y^*)^2 - c$ 이다. 이를 전개하면 다음과 같다.

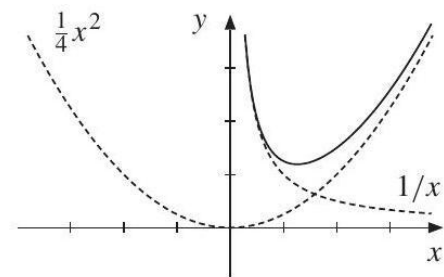
$$Ay^* - Ad + B(y^*)^2 - 2Bdy^* + Bd^2 = Ay^* + B(y^*)^2 - c$$

따라서 $y^* = \frac{Bd^2 - Ad + c}{2Bd}$

CHAPTER 05 함수의 성질

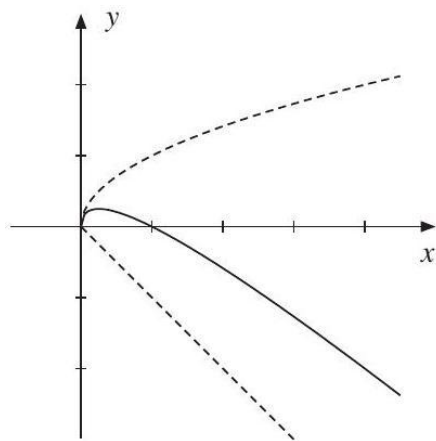
5.2 기존 함수로부터 새로운 함수 구성하기

1.

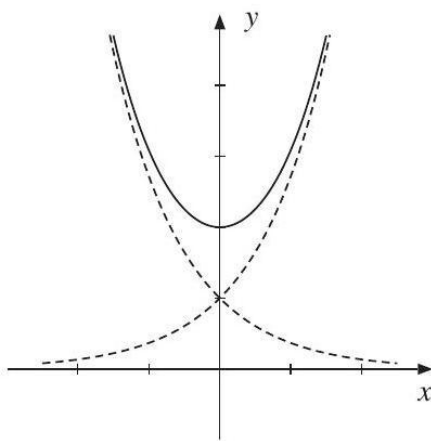


2.

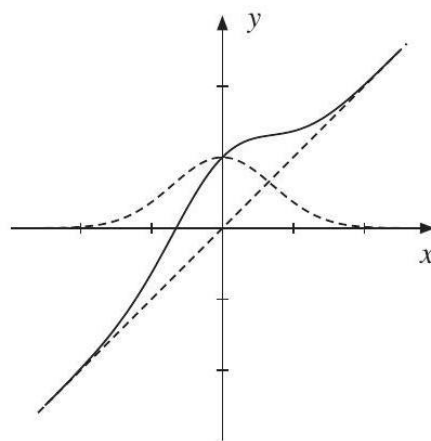
(a)



(b)



(c)



3.

$$(f+g)(x) = 3x, (f-g)(x) = 3x - 2x^3, (fg)(x) = 3x^4 - x^6, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3}{x^2} - 1, f(g(1)) = f(1) = 2, g(f(1)) = g(2) = 8$$

4.

$f(x) = 3x + 7$ 이면 $f(f(x)) = f(3x + 7) = 3(3x + 7) + 7 = 9x + 28$ 이다. $f(f(x^*)) = 100$ 은 $9x^* + 28 = 100$ 을 의미하므로 $x^* = 8$ 이다.

5.

$$\ln(\ln e) = \ln 1 = 0 \text{이고 } (\ln e)^2 = 1^2 = 1$$

CHAPTER 05 함수의 성질

5.3 역함수

1.

$$P = \frac{1}{3}(64 - 10D)$$

2.

$$P = \left(\frac{157.8}{D}\right)^{\frac{10}{3}}$$

3.

(a) 정의역과 치역은 $\mathbb{R}$ 이다. 역함수는 $x = -\frac{y}{3}$ 이다.

(b) 정의역과 치역은 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 이다. 역함수는 $x = \frac{1}{y}$ 이다.

(c) 정의역과 치역은 $\mathbb{R}$ 이다. 역함수는 $x = y^{\frac{1}{3}}$ 이다.

(d) 정의역은 $[4, \infty)$ 이고 치역은 $[0, \infty)$ 이다. 역함수는 $x = (y^2 + 2)^2$ 이다.

4.

(a) f^{-1} 의 정의역은 $\{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$ 이다. $f^{-1}(2) = -1$

(b) $f(x) = 2x + 4$, 역함수는 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$

5.

$f(x) = x^2$ 은 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 일대일함수가 아니다. 따라서 역함수가 존재하지 않는다. 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 f 는 순증가하고, 역함수는 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ 이다.

6.

(a) $f(x) = \frac{x}{2}$ 이고 역함수는 $g(x) = 2x$ 이다.

(b) $f(x) = 3x - 2$ 이고 역함수는 $g(x) = \frac{1}{3}(x + 2)$ 이다.

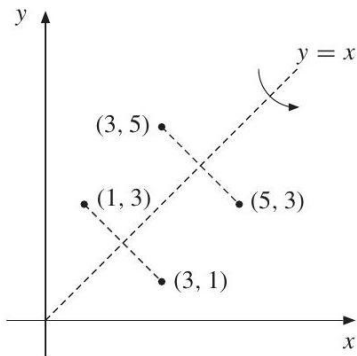
(c) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ 이고 역함수는 $F = \frac{9}{5}C + 32$ 이다.

7.

$f^{-1}(Q)$ 는 당근 Q 킬로그램의 가격을 나타낸다.

8.

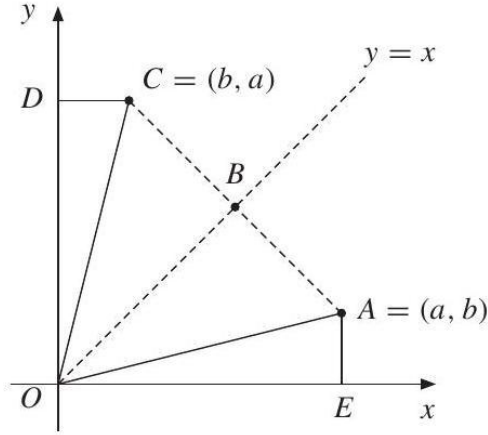
(a) [그림 A5.3.8a]를 참고하라.



CHAPTER 05 함수의 성질

[그림 A5.3.8a]

(b) [그림 A5.3.8b]를 참고하라. 삼각형 OBA 와 OBC 는 합동이다. 점 A 와 C 의 중점은 $B = \left(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b)\right)$ 이다.



[그림 A5.3.8b]

9.

(a) $f^{-1}(x) = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}$

(b) $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

(c) $f^{-1}(x) = (1 - (x-2)^5)^{\frac{1}{3}}$

10.

(a) $x = \ln y - 4$ (단, $y > 0$)

(b) $x = e^{y+4}$ (단, $y \in (-\infty, \infty)$)

(c) $x = 3 + \ln(e^y - 2)$ (단, $y > \ln 2$)

11.

$x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ 을 y 에 대해 풀어야 한다. 양변에 e^y 을 곱하면 $\frac{1}{2}e^{2y} - \frac{1}{2} = xe^y$ 이고, 정리하면 $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ 이다.

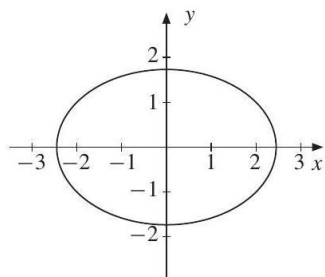
$e^y = z$ 라 두면 $z^2 - 2xz - 1 = 0$ 이고, 해는 $z = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$ 이다. $z = x - \sqrt{x^2 + 1}$ 이라 하면 z 는 음수가 되어 $z = e^y$ 과 모순이다. 따라서 $z = e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ 이다. 따라서 역함수는 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 이다.

CHAPTER 05 함수의 성질

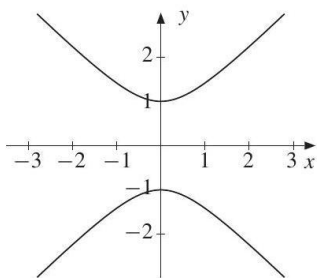
5.4 방정식의 그래프

1.

(a) 몇 가지 해는 $(0, \pm\sqrt{3})$, $(\pm\sqrt{6}, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ 이다.

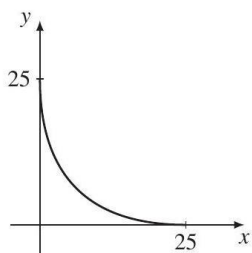


(b) 몇 가지 해는 $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm\sqrt{2})$, $(\pm 3, \pm\sqrt{10})$ 이다.



2.

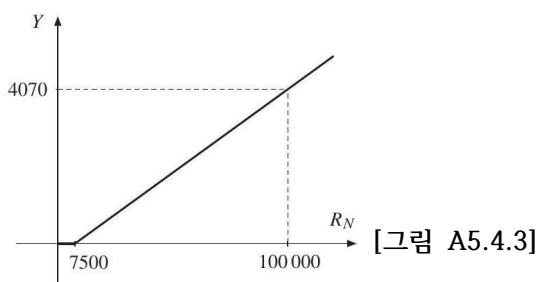
여기서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 이다. 점 (a, b) 가 그래프 위에 있다면 점 (b, a) 도 그래프 위에 있다. 따라서 그래프는 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이다. 그래프에는 $(25, 0)$, $(0, 25)$, $(\frac{25}{4}, \frac{25}{4})$ 와 같은 특정한 점들이 포함되어 있다. 그래프 위의 점들을 쉽게 찾는 방법은 다음과 같다. $u + v = 5$ 를 만족하는 0이 아닌 실수 u , v 를 택하고, $x = u^2$, $y = v^2$ 이라 둔다. [그림 A5.4.2]를 참고하라.



[그림 A5.4.2]

3.

$F(100000) = 4070$ 이다. 그래프는 [그림 A5.4.3]을 참고하라.



[그림 A5.4.3]

CHAPTER 05 함수의 성질

5.5 평면에서의 거리

1.

(a) $\sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$

(b) $\sqrt{5}$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{205}$

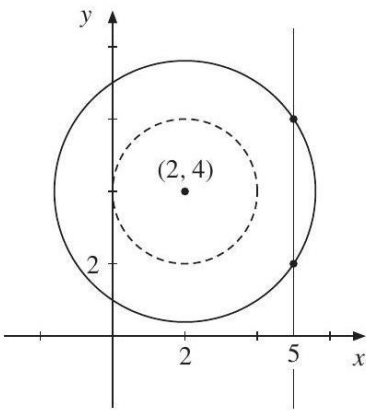
(d) $\sqrt{x^2 + 9}$

(e) $2|a|$

(f) $2\sqrt{2}$

2.

$(5-2)^2 + (y-4)^2 = 13$, 정리하면 $y^2 - 8y + 12 = 0$ 이다. 이 방정식의 해는 $y = 2$, $y = 6$ 이다. 기하적으로 해석하면 중심이 $(2, 4)$ 이고 반지름이 $\sqrt{13}$ 인 원이 직선 $x = 5$ 와 만나는 점이 두 개라는 뜻이다. [그림 A5.5.2]를 참고하라.



[그림 A5.5.2]

3.

(a) 5.362

(b) $\sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi - 1)^2} = \sqrt{8\pi^2 - 4\pi + 1} \approx 8.209$

4.

(a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

(b) 중심이 $(2, 5)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-5)^2 = r^2$ 이다. 이 원에 점 $(-1, 3)$ 이 있으므로 $(-1-2)^2 + (3-5)^2 = r^2$ 을 만족하고, $r^2 = 13$ 이다.

5.

(a) 식을 정리하면 $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 4$ 이므로 이 방정식은 중심이 $(-5, 3)$ 이고 반지름이 2인 원이다.

(b) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 12$ 이므로 이 방정식은 중심이 $(-3, 4)$ 이고 반지름이 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 인 원이다.

6.

문제의 조건을 $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ 으로 나타낼 수 있으며, 정리하면 $(x-6)^2 + y^2 = 4^2$ 이다.

7.

식을 $cx - ax + dy - b = 0$ 으로 쓸 수 있다. 이 식을 (5.5.5)와 비교하면 $A = C = 0$, $B = c$ 이므로 $4AC < B^2$ 은 $0 < c^2$ 을 의미한다. 즉 $c \neq 0$ 이다. 이는 [EX 4.7.7]에서 가정한 조건과 정확히 일치한다.

8.

$A^2 + B^2 > 4C$ 이면 그래프는 중심이 $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{4}B\right)$ 이고 반지름이 $\sqrt{C - \frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{4}B^2}$ 인 원이다.

$A^2 + B^2 = 4C$ 이면 그래프는 한 점 집합 $\left\{-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right\}$ 이다.

CHAPTER 05 함수의 성질

$A^2 + B^2 < 4C$ 이면 공집합이다.

9.

완전제곱식을 이용하면 $D = E = 0$ 이고, 식 (5.5.5)는 $A\left(x + \frac{By}{2A}\right)^2 + \frac{1}{4A}(4AC - B^2)y^2 + F = 0$ 이다. 여기서 $A > 0$ 이다.

(i) $4AC - B^2 > 0$: 그래프는 $F < 0$ 이면 타원(이때 $4AC - B^2 = 4A^2$ 이면 원), $F = 0$ 이면 하나의 점 $\left(-\frac{B}{2A}, 0\right)$,

$F > 0$ 이면 공집합이다.

(ii) $4AC - B^2 = 0$: 그래프는 $F < 0$ 이면 평행한 두 직선 $x = -\frac{By}{2A} \pm \sqrt{-\frac{F}{A}}$, $F = 0$ 이면 직선 $x = -\frac{By}{2A}$, $F > 0$ 이면

공집합이다. (식 (5.5.5)에서 $D = E = 0$ 이면 포물선은 나타날 수 없음)

(iii) $4AC - B^2 < 0$: 그래프는 $F \neq 0$ 이면 포물선, $F = 0$ 이면 서로 만나는 두 직선 $x = \frac{1}{2A}(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})y$

CHAPTER 05 함수의 성질

5.6 일반적인 함수

1.

(c)만 함수를 정의하지 않는다. 같은 넓이를 가진 직사각형이어도 둘레는 다를 수 있기 때문이다.

2.

(b)는 일대일함수이고 역함수를 가진다. 생존한 자녀 중 가장 어린 자녀를 어머니에게 대응하는 규칙이다.

(d)는 일대일함수이고 역함수를 가진다. 구의 겉넓이에 부피를 대응하는 규칙이다.

(e)는 일대일함수이고 역함수를 가진다. 순서쌍 (u, v) 에 $(u-3, v)$ 를 대응하는 규칙이다.

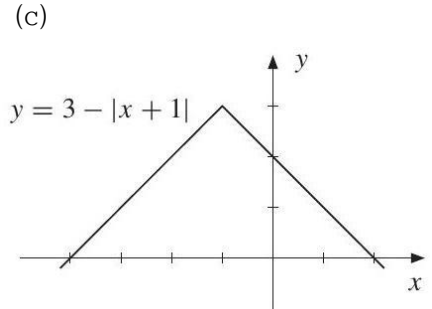
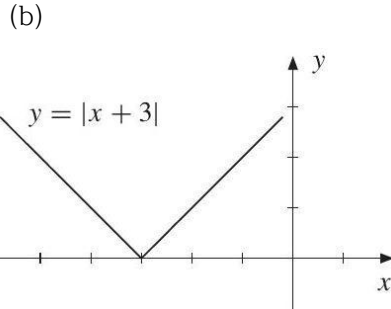
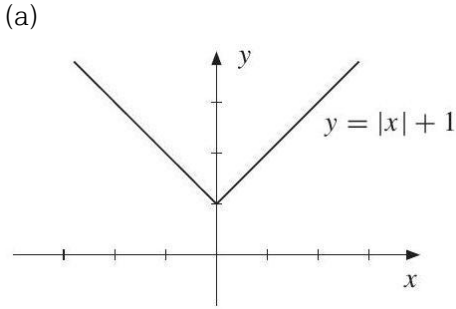
(a)는 다대일함수이므로 역함수가 존재하지 않는다.

CHAPTER 05 함수의 성질

CHAPTER 05 복습문제

5.1

함수 $y = |x|$ 의 이동은 5.1절 [연습문제 1]의 $y = x^2$ 의 이동과 동일하다.



5.2

(a) $(f + g)(x) = x^2 - 2$

(b) $(f - g)(x) = 2x^3 - x^2 - 2$

(c) $(fg)(x) = x^2(1 - x)(x^3 - 2)$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2(1 - x)}$

(e) $f(g(1)) = f(0) = -2$

(f) $g(f(1)) = g(-1) = 2$

5.3

(a) 균형조건은 $150 - \frac{1}{2}P^* = 20 + 2P^*$ 이므로 $P^* = 52$, $Q^* = 20 + 2P^* = 124$

(b) $S = 20 + 2(\bar{P} - 2) = 16 + 2\bar{P}$ 이므로 $\frac{5\bar{P}}{2} = 134$ 일 때 $S = D$ 이다. 따라서 $\bar{P} = 53.6$, $\bar{Q} = 123.2$

(c) 세금이 부과되기 전에는 $R^* = P^*Q^* = 6448$ 이고 세금이 부과된 후에는 $\bar{R} = (\bar{P} - 2)\bar{Q} = 51.6 \cdot 123.2 = 6357.12$ 이다.

5.4

$$P = \frac{64 - 10D}{3}$$

5.5

$$P = 24 - \frac{1}{5}D$$

5.6

(a) $x = 50 - \frac{1}{2}y$

(b) $x = \sqrt[5]{\frac{y}{2}}$

(c) $x = \frac{1}{3} \left\{ 2 + \ln \left(\frac{y}{5} \right) \right\}$ (단, $y > 0$)

5.7

(a) $y = \ln(2 + e^{x-3})$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $y = -\frac{1}{\lambda} \ln a - \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right)$, $x \in (0, 1)$

5.8

(a) $\sqrt{13}$

(b) $\sqrt{17}$

(c) $\sqrt{(2 - 3a)^2} = |2 - 3a|$ (여기서 $2 - 3a \geq 0$, 즉 $a \leq \frac{2}{3}$ 일 때만 $2 - 3a$ 가 올바른 답임에 유의하라. $a = 3$ 을 넣어 확인해보라.)

CHAPTER 05 함수의 성질

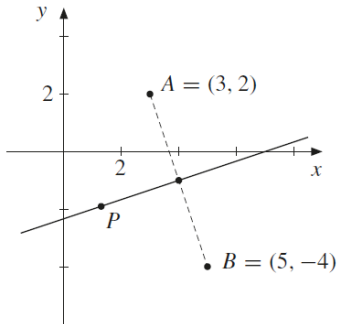
5.9

(a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

(b) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 65$

5.10

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y+4)^2$ 은 $x-3y=7$ 이다. [그림 A5.R.10]을 참고하라.



[그림 A5.R.10]

5.11

이 함수는 일대일함수일 수 없다. 다섯 명 중 적어도 두 명은 동일한 혈액형을 가질 수밖에 없기 때문이다.